SOLUZIONE SIMULAZIONE SECONDA PROVA DI MAEMATICA E FISICA

1. PROBLEMA

1 In un punto dell'asse x i campi elettrici generati dalle due distribuzioni di carica sono diretti lungo l'asse x e così anche il campo risultante (**fig. 1**). Dunque la componente y di quest'ultimo è uguale a 0.

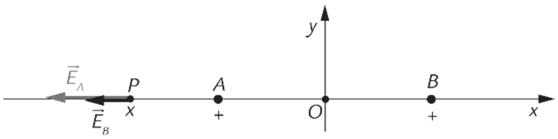

Figura 1

La componente x del campo generato dalla distribuzione A è: $E_{Ax} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x+a)}$.

La componente x del campo generato dalla distribuzione B è: $E_{Bx} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(x-a)}$.

La componente x del campo risultante è quindi: $E_x(x) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x+a}\right) = \dfrac{\lambda x}{\pi\varepsilon_0(x^2 - a^2)}$.

Si ha: $E_x(2a) = \dfrac{2\lambda}{3\pi\varepsilon_0 a} = \dfrac{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}}}{3\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \text{N/C}$

2 È immediato osservare (**fig. 2**) che le componenti x dei due vettori $\overrightarrow{E_A}$ ed $\overrightarrow{E_B}$ sono opposte, per cui la componente x del campo totale è nulla.

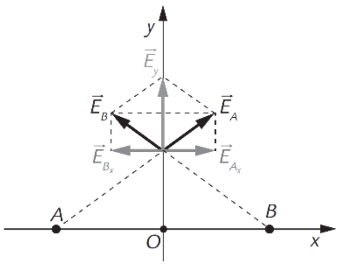

Figura 2

Le componenti y dei due vettori sono invece uguali e si sommano, dando luogo alla componente:

$$E_y(y) = \frac{\lambda y}{\pi\varepsilon_0(a^2 + y^2)}$$

Si ha:

$$E(2a) = \frac{2\lambda}{5\pi\varepsilon_0 a} = \frac{2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-6}\,\dfrac{\text{C}}{\text{m}}}{5\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 9{,}0 \cdot 10^5\ \text{N/C}$$

3 In **fig. 3** è rappresentato il grafico della funzione: $E_x(x) = \dfrac{\lambda x}{\pi\varepsilon_0(x^2 - a^2)}$.

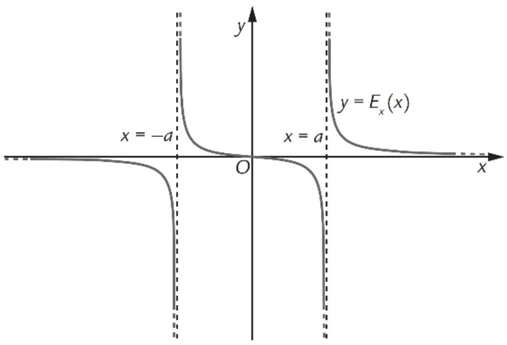

Figura 3

La funzione presenta due asintoti verticali di equazioni $x = \pm a$, ha come asintoto orizzontale l'asse x, è una funzione dispari e passa per l'origine, dove ha un punto di flesso.

Si ha: $V(x) = -\int E_x(x)\,dx$, con la condizione $V(0) = 0$.

$$V(x) = -\int E_x(x)\,dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int \frac{2x}{x^2 - a^2}\,dx = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln|x^2 - a^2| + c$$

Con la condizione data si trova: $c = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln a^2$, da cui $V(x) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a^2}{|x^2 - a^2|}$.

4 In **fig. 4** è rappresentato il grafico della funzione $E_y(y) = \frac{\lambda y}{\pi\varepsilon_0(a^2 + y^2)}$.

Si tratta di una funzione dispari che ha come asintoto orizzontale l'asse delle ascisse, presenta un punto di minimo assoluto in $\left(-a, -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\right)$, un punto di massimo assoluto in $\left(a, \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\right)$ e tre punti di flesso: uno in (0, 0) e due in $P_{1,2}\left(\pm\sqrt{3}a, \pm\frac{\sqrt{3}\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\right)$.

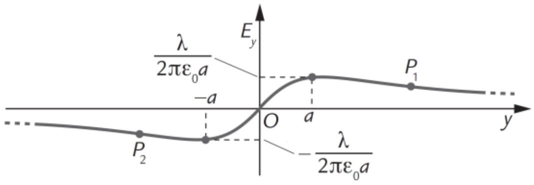

Figura 4

Il calcolo del lavoro della forza elettrica durante lo spostamento lungo l'asse y di una carica puntiforme tra due punti aventi ordinate opposte prevede il calcolo di un integrale di funzione dispari in un intervallo simmetrico rispetto allo 0. Per questo motivo esso dà sempre come risultato 0.

2. QUESITO DI FISICA

Considerando un sistema di riferimento con un asse h diretto verso l'alto e l'origine a terra, le leggi orarie delle due palline sono le seguenti:

$$h_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad h_2(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

L'altezza del centro di massa è quindi:

$$h_{CM}(t) = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2 h_0}{m_1 + m_2} + \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Questo è vero almeno fino a che le palline non si scontrano o non giungono a terra.

Il centro di massa è soggetto a un moto verticale uniformemente accelerato, con posizione iniziale data da $h_{CM0} = \frac{m_2 h_0}{m_1 + m_2}$, velocità iniziale $v_{CM0} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0$ e accelerazione $-g$.

La velocità del centro di massa varia nel tempo secondo la legge:

$$v_{CM}(t) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_0 - gt$$

Essa si annulla all'istante $t = \frac{m_1 v_0}{g(m_1 + m_2)}$.

In questo istante il centro di massa raggiunge l'altezza massima:

$$h_{CM\max} = 7{,}3\ \text{m}$$

3. QUESITO DI MATEMATICA

Il dominio naturale della funzione è l'intervallo $(0, +\infty)$.

La derivata prima è: $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Studiandone il segno, si verifica che il grafico della funzione presenta un punto di massimo assoluto di coordinate $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

Possiamo quindi affermare che $\dfrac{\ln x}{x} \leq \dfrac{1}{e}$, per ogni $x > 0$; in particolare:

$$\frac{\ln x}{x} < \frac{1}{e} \text{ per ogni } x > 0 \text{ con } x \neq e \qquad [1]$$

Osserviamo poi che:

$$\pi^e < e^\pi \quad \Leftrightarrow \quad \ln \pi^e < \ln e^\pi \quad \Leftrightarrow \quad e \ln \pi < \pi \ln e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$$

Poiché l'ultima disuguaglianza scritta è una conseguenza della [1] (nel caso particolare in cui $x = \pi$), resta provato che $\pi^e < e^\pi$.